SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Álgebra

Tema: Determinantes y matriz inversa

Docente: Gustavo Poma Quiroz

1. Si se cumple

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} \pi & 6 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcule el menor valor de $|A|$ si $A = (a_{ij})_{2x2}$

A) 5 B) -2 C) -3 D) -5 E) -1

Resolución

Aplicando determinantes

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} |A| \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} |A^T| = \begin{vmatrix} \pi & 6 \\ 15 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(-1)|A|(20)|A| = (-90)(2)$$

$$-|A|^2(20) = -180$$

$$|A|^2 = 9 \rightarrow |A| = \pm 3$$

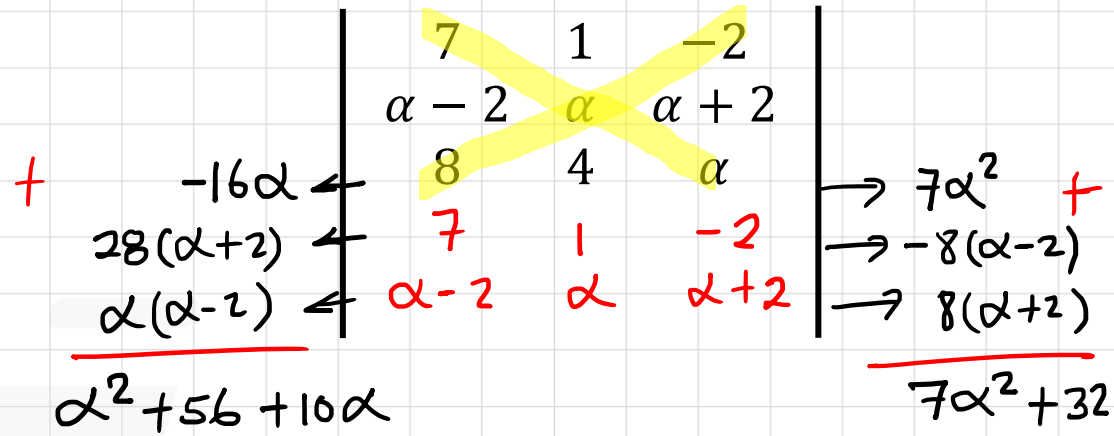
2. Halle los valores de α para los cuales la matriz no sea invertible

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ \alpha-2 & \alpha & \alpha+2 \\ 8 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$$

Resolución

Sea $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ \alpha-2 & \alpha & \alpha+2 \\ 8 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$

Si A es invertible $\Rightarrow |A| \neq 0$



$$|A| = 7\alpha^2+32-(\alpha^2+56+10\alpha)$$

$$|A| = 6\alpha^2-10\alpha-24 \neq 0$$

$$3\alpha^2-5\alpha-12 \neq 0$$

3α $+4$

α -3

$$(3\alpha+4)(\alpha-3) \neq 0$$

$$\alpha \neq -\frac{4}{3} \; ; \quad \alpha \neq 3$$

3. Calcule el equivalente de:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

A) $(x+1)^3$ B) $(x+1)^6$ C) $(x-1)^3$

D) $(x-1)^6$ E) $(x-1)^9$

Resolución

Aplicando operaciones fila y factorizando

f_1-f_2 ; f_2-f_3 ; f_3-f_4

$$\begin{vmatrix} x^2(x-1) & 2x(x-1) & x-1 & 0 \\ x(x-1) & (x-1)(x+1) & x-1 & 0 \\ x-1 & 2(x-1) & x-1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} x^2(x-1) & 2x(x-1) & x-1 \\ x(x-1) & (x-1)(x+1) & x-1 \\ x-1 & 2(x-1) & x-1 \end{vmatrix}$$

Regla de signos

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

$$= (x-1)^3 \begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ x & x+1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

f_1-f_2 ; f_2-f_3

$$= (x-1)^3 \begin{vmatrix} x(x-1) & x-1 & 0 \\ x-1 & x-1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Regla de signos

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$= +(x-1)^3 \begin{vmatrix} x(x-1) & x-1 \\ x-1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^3 (x-1)^2 \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^5 (x-1) = (x-1)^6$$

4. Si $\begin{vmatrix} 1 & sen40° & cos40° \\ 1 & sen10° & cos10° \\ 1 & sen20° & cos20° \end{vmatrix} = a - senb° - senc°$

Calcule $2a + b + c$

Observación: $\mathbf{2senxcosy = sen(x+y) + sen(x-y)}$

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

Resolución

$$\begin{array}{r|ccc|l} & 1 & sen40° & cos40° & \\ & 1 & sen10° & cos10° & \\ sen10°cos40° \leftarrow & 1 & sen20° & cos20° & \rightarrow sen10°cos20° \\ sen20°cos10° \leftarrow & 1 & sen40° & cos40° & \rightarrow sen20°cos40° \\ sen40°cos20° \leftarrow & 1 & sen10° & cos10° & \rightarrow sen40°cos10° \end{array}$$

Sea N el determinante

$$2N = 2sen10°cos20° + 2sen20°cos40° + 2sen40°cos10° - 2sen10°cos40° - 2sen20°cos10° - 2sen40°cos20°$$

$$2N = \cancel{sen30°} + sen(-10°) + \cancel{sen60°} + sen(-20°) + \cancel{sen50°} + sen30° - (\cancel{sen50°} + \underbrace{sen(-30°)}_{-sen30°}) - (\cancel{sen30°} + sen10°) - (\cancel{sen60°} + sen20°)$$

$$2N = -sen10° - sen20° + \frac{1}{2} + \underbrace{sen30°}_{\frac{1}{2}} - sen10° - sen20°$$

$$2N = 1 - 2sen10° - 2sen20°$$

$$N = \frac{1}{2} - sen10° - sen20° = a - senb° - senc°$$

$\rightarrow a = \frac{1}{2}$; $b = 10$, $c = 20$

Piden $1 + 10 + 20 = 31$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

5. Si $P \in \mathbb{R}^{3\times3}, Q \in \mathbb{R}^{2\times2}$, además $|P| \neq 0 \wedge |Q| \neq 0$, tal que $|P^2| = |Q|P^{-1}||$.

calcule $\left|\dfrac{5Q^2Q^T|Q^{-1}|}{|P^{-1}|P^T||}\right|$

A) 1 B) 5 C) 25 D) 125 E) 625

Resolución

Sean: $|P| = a \rightarrow |P^T| = a$; $|P^{-1}| = \frac{1}{a}$

$|Q| = b \rightarrow |Q^T| = b$; $|Q^{-1}| = \frac{1}{b}$

En el denominador

$$|P^{-1}|P^T||\ (\#) = |P^T|P^{-1}| = |aP^{-1}| = a^3|P^{-1}| = \frac{a^3}{a} = a^2$$

Dato $|P^2| = |Q|P^{-1}|\ (\#)$

$$|P|^2 = \left|\frac{1}{a}Q\right| = \frac{1}{a^2}|Q| \Rightarrow a^2 = \frac{1}{a^2}b$$

$$b = a^4$$

2°En el problema

$$K = \left|\frac{5Q^2Q^T|Q^{-1}|\ (\#)}{a^2}\right|$$

$$K = \left|\frac{\frac{5}{b}Q^2Q^T}{a^2}\right|$$

$$K = \left|\frac{5}{ba^2}Q^2Q^T\right|$$

$$K = \left(\frac{5}{ba^2}\right)^2|Q^2||Q^T|$$

$$K = \frac{25}{b^2a^4}|Q|^2|Q| = \frac{25\cdot b^3}{b^2a^4} = \frac{25b}{a^4}$$

$$K = 25$$

6. Si $A=(a_{ij})_{2x3}=\begin{cases} i\,;\, i\leq j \\ j\,;\, i>j \end{cases}$

$B=(b_{ij})_{3x2}=\begin{cases} j\,;\, i\leq j \\ i\,;\, i>j \end{cases}$

Determine la traz$(AB)^{-1}$

A) $-\frac{18}{5}$ B) $-\frac{7}{5}$ C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{9}{5}$ E) $\frac{12}{5}$

Resolución

Se tiene

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$

Tenemos $AB=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$ $\rightarrow |AB|=72-77$

$|AB|=-5$

$\rightarrow (AB)^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 12 & -7 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}$

Piden traz$(AB)^{-1}=-\frac{12}{5}-\frac{6}{5}=-\frac{18}{5}$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

7. Si $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 6 & 4 & -2\end{pmatrix}$ determine su adjunta.

A) $\begin{pmatrix}-2 & 10 & 14\\ 2 & 2 & 10\\ 1 & -5 & -13\end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix}2 & 10 & 14\\ 2 & 2 & -2\\ 1 & 5 & -13\end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix}-2 & 2 & 4\\ 10 & 2 & -5\\ 1 & 5 & -3\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}2 & 10 & 14\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & 15 & -13\end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 10 & 2 & -5\\ 14 & 10 & -13\end{pmatrix}$

Resolución

$A_{11}=+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-2$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}5 & 0\\ 6 & -2\end{vmatrix}=10$; $A_{13}=+\begin{vmatrix}5 & 1\\ 6 & 4\end{vmatrix}=14$

$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=2$; $A_{22}=+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 6 & -2\end{vmatrix}=2$; $A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 4\end{vmatrix}=10$

$A_{31}=+\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=+1$; $A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-5$; $A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-13$

Luego

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}-2 & 10 & 14\\ 2 & 2 & 10\\ 1 & -5 & -13\end{pmatrix}^t$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 10 & 2 & -5\\ 14 & 10 & -13\end{pmatrix}$$

8. Luego de hallar la matriz P donde $P^{-1} = |P^2| \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

Calcule la suma de elementos de dicha matriz.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Resolución

Se tiene

$$|P^{-1}| = \left| |P^2| \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \right|$$

$$\frac{1}{|P|} = |P^2|^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{|P|} = |P|^4 (-1)$$

$$1 = |P|^5 (-1) \rightarrow |P| = -1$$

Obs: Si $A = B$

$$|A| = |B|$$

Reem. en

$$P^{-1} = |P|^2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)$$

$$P = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sum \text{elementos} = 0$$

9. Si A y B son matrices no singulares de orden n. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. $Adj(A.B) = Adj(A).Adj(B)$

II. $Adj(A^{-1}) = (Adj(A))^{-1}$

III. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1/2 & 0 \\ n & p & 1/3 \end{pmatrix}$ es simétrica, entonces

$\text{Traz}(A^{-1}) = 6$

A) VVV B) VFF C) FVV

D) FVF E) VVF

Resolución

Recordar $Adj(\square) = |\square|\square^{-1}$

I. Falsa

$$Adj(AB) = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1}$$
$$= |B|B^{-1}|A|A^{-1} = Adj(B)\,Adj(A)$$

II Verdadera

$$* \quad Adj(A^{-1}) = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A$$

$$* \quad (Adj(A))^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}$$

(# $|A|$)

$$= \frac{1}{|A|}A$$

9. Si A y B son matrices no singulares de orden n. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. $Adj(A.B) = Adj(A).Adj(B)$

II. $Adj(A^{-1}) = (Adj(A))^{-1}$

III. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1/2 & 0 \\ n & p & 1/3 \end{pmatrix}$ es simétrica, entonces

$\text{Traz}(A^{-1}) = 6$

A) VVV B) VFF C) FVV

D) FVF E) VVF

Resolución

Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$

$abc \neq 0$

III

Se tiene $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1/2 & 0 \\ n & p & 1/3 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & 1/2 & p \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Como $A = A^T \rightarrow m = n = p = 0$

Luego $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$; $|A| = \frac{1}{6}$

$A^{-1} = 6\,Adj(A) = 6\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \text{Traz}(A^{-1}) = 6$

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe